

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Гомологическая алгебра
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.М. Елишев, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 18.05.2023

Аннотация

Данный спецкурс посвящен началам гомологической алгебры и связанным с ней основаниям алгебраической топологии. Основная часть курса оперирует категориями (левых и правых) модулей над ассоциативными кольцами с единицей – то есть курс читается в основном с точки зрения Картана и Эйленберга, более удобной для элементарного изложения по сравнению с общей теорией абелевых категорий (точка зрения Гротендика; ей, однако, также будет посвящен раздел в конце курса). Курс задуман как продолжение, развитие и в некотором смысле параллельная программа по отношению к двухсеместровому курсу топологии, читаемому автором на 3 и 4 курсах кафедры дискретной математики. Он также может быть полезен слушателем трехсеместрового курса алгебраической геометрии на 5 и 6 курсах.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение фундаментальных понятий гомологической алгебры;
формирование и развитие у студентов структурно-алгебраического мышления и умения видеть общие алгебраические конструкции в различных областях математики.

Задачи дисциплины

знакомство с основными понятиями гомологической алгебры;
освоение техники работы с комплексами и когомологиями (точные последовательности, диаграммный поиск, построение длинной точной последовательности когомологий по короткой точной последовательности комплексов);
изучение теории категорий, освоение понятий аддитивной, абелевой, триангулированной, производной категории, производных функторов, их связи с производными категориями.
изучение взаимосвязей между гомологической алгеброй и другими разделами математики: алгебраической топологией, коммутативной алгеброй, алгебраической геометрией, теорией представлений.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе,	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

начальные познания в коммутативной алгебре и в топологии (общей и алгебраической).

уметь:

видеть общие алгебраические конструкции в различных областях математики.

владеть:

техникой работы с комплексами и кохомологиями (точные последовательности, диаграммный поиск, построение длинной точной последовательности кохомологий по короткой точной последовательности комплексов).

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Предварительные сведения	2	2		7
2	Категории, функторы и естественные преобразования. Двойственность. Универсальные конструкции	2	2		7
3	Сателлиты	2	2		7
4	Модули с дифференциалом	2	2		7

5	Комплексы над модулями	2	2		7
6	Производные функторы	2	2		7
7	Ассоциативные алгебры	2	2		6
8	Приложения к алгебраической топологии	4	4		6
9	Предпучки и пучки абелевых групп на топологическом пространстве	4	4		7
10	Абелевы категории	4	4		7
11	Спектральные последовательности	4	4		7
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Предварительные сведения

Ассоциативные кольца с единицей и левые и правые модули над ними. Гомоморфизмы. Ядро, коядро, образ, кообраз. Точные последовательности. Коммутативные диаграммы, диаграммный поиск. Начальные леммы (лемма о пяти гомоморфизмах, лемма о расщеплении, лемма о змее). Проективные и инъективные модули. Полупростые кольца. Наследственные и полунаследственные кольца. Нетеровы кольца.

2. Категории, функторы и естественные преобразования. Двойственность. Универсальные конструкции

Сопряженные функторы. Преаддитивные и аддитивные категории, аддитивные функторы. Категории левых и правых модулей над ассоциативным кольцом. Функторы Hom и \otimes . Свойства сохранения точности. Сложные функторы. Замена колец.

3. Сателлиты

Связывающие гомоморфизмы. Полуточные функторы. Связанные последовательности функторов. Сложные функторы, случай нескольких аргументов.

4. Модули с дифференциалом

Кольца двойных чисел. Градуированные модули и комплексы. Модули гомологий. Гомотопии комплексов. n -кратные градуированные модули и n -кратные комплексы, гомотопии. Функторы комплексов. Естественные преобразования модулей гомологий. Соотношения Кюннета.

5. Комплексы над модулями

Резольвенты. Резольвенты точных последовательностей. Определение производных функторов. Связывающие гомоморфизмы. Функторы $R\text{Hom}$ и $L\text{Hom}$. Связь с сателлитами. Методы вычисления. Суммы, произведения, пределы. Производная последовательность отображения.

6. Производные функторы

Производные функторы для функторов \otimes и Hom , функторы Tor и Ext . Проективная и инъективная размерности модуля. Глобальная размерность кольца. Теорема Гильберта о сизигиях. Соотношения Кюннета - 2. Замена колец. Гомоморфизмы двойственности.

7. Ассоциативные алгебры

Тензорные произведения алгебр. Формулы ассоциативности. Гомологии и когомологии алгебр. Комплекс Хохшильда.

8. Приложения к алгебраической топологии

Симплициальные и сингулярные гомологии. Гомотопическая инвариантность. Точные последовательности и вырезание. Теорема Эйленберга – Зильбера. Клеточные гомологии. Последовательности Майера – Вьеториса. Гомологии с коэффициентами. Аксиомы гомологий. Когомологии. Умножение. Соотношения Кюннета - 3. Двойственность Пуанкаре.

9. Предпучки и пучки абелевых групп на топологическом пространстве

Слойпредпучка. Ассоциированный пучок, универсальное свойство опучкования. Этальное пространство предпучка. Категория пучков абелевых групп на пространстве. Поведение при непрерывных отображениях пространств, прямой и обратный образ. Морфизмы пучков. Ядро, образ, коядро, кообраз. Подпучки и факторпучки. Пределы и копределы. Точные последовательности пучков и морфизмов. Носитель пучка. Пучки-небоскребы. Продолжение пучка нулем. Склеивание пучков.

10. Абелевы категории

Аксиомы Гротендика. Начальные свойства. Подкатегории Серра. Факторкатегории. Локализация категории, локализация абелевой категории. Производная категория абелевой категории. Связь с производными функторами.

11. Спектральные последовательности

Определение и свойства. Комплексы фильтрацией. Построение и примеры. Приложения к комплексной геометрии (последовательность Ходжа – де Рама).

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная аудитория для лекций, оснащенная мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система) и компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет».

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Когомологии бесконечных алгебр Ли [Текст]/Д. Б. Фукс, -М., Наука, 1984
2. Основы алгебраической геометрии [Текст] / И. Р. Шафаревич - М.МЦНМО, 2007

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. А.В. Ершов Категории и функторы <http://window.edu.ru/resource/165/77165>
2. А.В. Ершов Функторные морфизмы <http://window.edu.ru/resource/166/77166>
3. А.Д. Елагин Введение в гомологическую алгебру <https://ium.mccme.ru/s16/s16-elagin.html>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует самостоятельной работы студента с источниками. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций),
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях,

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.М. Елишев, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гомологическая алгебра» обучающийся должен:

знать:

начальные познания в коммутативной алгебре и в топологии (общей и алгебраической).

уметь:

видеть общие алгебраические конструкции в различных областях математики.

владеть:

техникой работы с комплексами и когомологиями (точные последовательности, диаграммный поиск, построение длинной точной последовательности когомологий по короткой точной последовательности комплексов).

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

- 1.Связывающие гомоморфизмы.
- 2.Функторы R_0T и L_0T .
3. Связь с сателлитами.
4. Методы вычисления.
- 5.Суммы, произведения, пределы.
- 6.Производная последовательность отображения.
- 7.Производные функторы для функторов \otimes и Hom , функторы Tor и Ext .
- 8.Проективная и инъективная размерности модуля.
- 9.Глобальная размерность кольца.
- 10.Теорема Гильберта о сизигиях.
11. Соотношения Кюннета - 2. Замена колец.
- 12.Гомоморфизмы двойственности.
13. Ассоциативные алгебры.
- 14.Тензорные произведения алгебр.
- 15.Формулы ассоциативности.
- 16.Гомологии и когомологии алгебр.
- 17.Комплекс Хохшильда.
- 18.Приложения к алгебраической топологии.
- 19.Симплициальные и сингулярные гомологии.
- 20.Гомотопическая инвариантность.
- 21.Точные последовательности и вырезание.
- 22.Теорема Эйленберга – Зильбера.
- 23.Клеточные гомологии.
- 24.Последовательности Майера – Вьеториса.
- 25.Гомологии с коэффициентами.
- 26.Аксиомы гомологий.
- 27.Когомологии.
- 28.Умножение. Соотношения Кюннета - 3.
- 29.Двойственность Пуанкаре.
- 30.Предпучки и пучки абелевых групп на топологическом пространстве.
- 31.Слойпредпучка.
32. Ассоциированный пучок, универсальное свойство опучкования.
33. Этальное пространство предпучка.
- 34.Категория пучков абелевых групп на пространстве.
- 35.Поведение при непрерывных отображениях пространств, прямой и обратный образ.
- 36.Морфизмы пучков.
- 37.Приложения к комплексной геометрии (последовательность Ходжа – де Рама).

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Предварительные сведения.
- 2.Ассоциативные кольца с единицей и левые и правые модули над ними.

3. Гомоморфизмы.
4. Ядро, коядро, образ, кообраз.
5. Точные последовательности.
6. Коммутативные диаграммы, диаграммный поиск.
7. Начальные леммы (лемма о пяти гомоморфизмах, лемма о расщеплении, лемма о змее).
8. Проективные и инъективные модули.
9. Полупростые кольца.
10. Наследственные и полунаследственные кольца.
11. Нетеровы кольца.
12. Категории, функторы и естественные преобразования.
13. Двойственность.
14. Универсальные конструкции.
15. Сопряженные функторы.
16. Преаддитивные и аддитивные категории, аддитивные функторы.
17. Категории левых и правых модулей над ассоциативным кольцом.
18. Свойства сохранения точности.
19. Сложные функторы.
20. Замена колец.
21. Сателлиты. Связывающие гомоморфизмы.
22. Полуточные функторы.
23. Связанные последовательности функторов.
24. Сложные функторы, случай нескольких аргументов.
25. Модули с дифференциалом.
26. Кольца двойных чисел.
27. Градуированные модули и комплексы.
28. Модули гомологий.
29. Гомотопии комплексов. g -кратные градуированные модули и g -кратные комплексы, гомотопии.
30. Функторы комплексов.
31. Естественные преобразования модулей гомологий.
32. Соотношения Кюннета.
33. Комплексы над модулями.
34. Резольвенты.
35. Резольвенты точных последовательностей.
36. Определение производных функторов.
37. Ядро, образ, коядро, кообраз.
38. Подпучки и факторпучки.
39. Пределы и копределы.
40. Точные последовательности пучков и морфизмов.
41. Носитель пучка.
42. Пучки-небоскребы.
43. Продолжение пучка нулем.
44. Склеивание пучков.
45. Абелевы категории.
46. Аксиомы Гротендика.
47. Начальные свойства.
48. Подкатегории Серра.
49. Факторкатегории.
50. Локализация категории, локализация абелевой категории.
51. Производная категория абелевой категории.
52. Связь с производными функторами.
53. Когомологии пучков.
54. Сателлиты. δ -функторы.
55. Стирающие и котирующие функторы.

- 56. Универсальность и производные функторы.
- 57. Аксиомы когомологий пучков, универсальность.
- 58. Функтор глобальных сечений и его производные.
- 59. Теорема Гротендика о когомологиях нетерова пространства.

Билет 1

- 1. Классические когомологические теории.
- 2. Когомологии Чеха.
- 3. Спектральные последовательности.

Билет 2

- 1. Определение и свойства.
- 2. Комплексы фильтрацией.
- 3. Построение и примеры.

Критерии оценивания

Обучающемуся ставится зачет в соответствии с продемонстрированным уровнем подготовки; оценивание производится на усмотрение преподавателя в соответствии с особенностями дисциплины и следующими критериями:

7 семестр:

Оценка "зачтено" - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике.

Оценка "не зачтено" - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

8 семестр:

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении оценивания знаний обучающемуся предоставляется время на подготовку на усмотрение преподавателя. Опрос обучающегося на дифференцированном зачете не должен превышать одного астрономического часа. Оценивание знаний производится в соответствии с вышеуказанными критериями в соответствии с содержанием дисциплины.